Combinatoire du Logarithme et Renormalisation en Physique

Abdelmalek Abdesselam, L.A.G.A.,
Université Paris XIII et C.N.R.S.

Plan :

I - Renormalisation

II - Log $(1+x)$

Ref : A.A., Thèse Ecole Polytechnique 11/6/1997

I - Renormalisation :

• Domaines de la physique concernés :

Physique des particules, physique statistique, physique du solide ...

• Problème mathématique n°1 de la physique $\geqslant 1950$:

Etude de certaines Intégrales fonctionnelles (Feynman Path Integrals) i.e. moyenne % à $N \to \infty$ degrés de liberté (variables aléatoires).

• Exemple :

$$\int_\Omega \mathcal{D}\phi \quad \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\ \exp\left[-\int_{\mathbb{R}^d} d^d x\ \left(\zeta\ \nabla\phi(x)^2 + \mu\ \phi(x)^2 + \lambda\ \phi(x)^4\right)\right]$$

$\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ "fonction" aléatoire dans Ω

$\mathcal{D}\phi$ = "mesure de Lebesgue sur Ω"

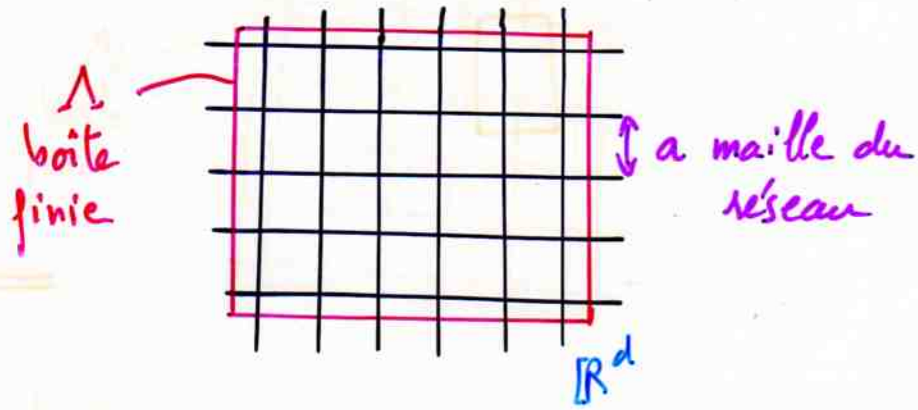
= "$\prod_{x \in \mathbb{R}^d} d[\phi(x)]$"

$x_1, \ldots, x_n$ collection de points dans $\mathbb{R}^d$.

Ici N = "Card$(\mathbb{R}^d)$". En fait "comptage" des degrés de liberté plus subtil :

- Groupe de renormalisation (K. Wilson)
- Développements dans l'espace des phases en Théorie constructive des champs (J. Glimm, A. Jaffe)

· Régularisation : $\mathbb{R}^d \to (a\mathbb{Z})^d \cap \Lambda$



· gradient ∇ $\to$ gradient aux différences finies

· $\int_{\mathbb{R}^d} d^d x$ $\to$ sommes de Riemann

· Problème : Contrôler les limites $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^d$, $\boxed{a \to 0}$

· Renormalisation Perturbative : On développe en λ

$\Rightarrow$ Famille infinie de séries formelles en λ

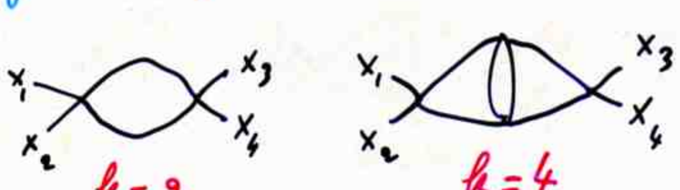
$$\left(F_{i,a}(\lambda)\right)_{i\in I,\, a>0} \quad , \quad F_{i,a}(\lambda) = \sum_{k \geq 0} c_{i,a,k}\, \lambda^k$$

· CATASTROPHE :

Pour presque tous les i et k, $\lim_{a\to 0} c_{i,a,k}$ diverge.

· Chaque $c_{i,a,k}$ somme finie de termes appelés Diagrammes de Feynman $\simeq$ Intégrales divergentes quand $a \to 0$.

ex: $n=4$



...

. <u>MIRACLE</u> : ($=:$ Renormalisation)

$$\begin{cases} \exists\, i_0 \in I \text{ tq } \quad F_{i_0,a}(\lambda) = \boxed{\lambda} + c_{i_0,a,2}\,\lambda^2 + \dots \\ \text{et } \underline{\underline{\forall i \in I}}, \\ \qquad F_{i,a} \circ F_{i_0,a}^{-1}(\lambda) = \sum_{k \geq 0} d_{i,a,k}\,\lambda^k \\ \text{vérifie } \underline{\underline{\forall k \geq 0}} \\ \qquad \lim_{a \to 0} d_{i,a,k} \quad \text{converge} \end{cases}$$

- $d_{i,a,k}$ s'exprime comme $c_{i,a,k}$ intégrales (diagrammes de Feynman) divergentes → leurs "parties finies".

- <u>Heuristique</u> : Tomonaga, Feynman, Schwinger, <u>Dyson</u>, ...

- <u>Théorèmes</u> : Bogoliubov, Parasiuk, Hepp, Zimmermann, ...

II Log(1+x) :

Développement de Mayer en Physique Statistique et en Théorie Constructive des Champs

. **Problème :** Λ ensemble fini fixé.

Y partie $\neq \emptyset$ de Λ = polymère

Calculer dans $\mathbb{C}[[\{A(Y)\}_{Y \text{ polymère } \subset \Lambda}]]$

variable associée à Y

amplitude

$\log Z$ où

$$Z = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{Y_1, \ldots, Y_n \\ \text{DISJOINTS}}} A(Y_1) \ldots A(Y_n)$$

$$\rightarrow \quad \log Z = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{Y_1, \ldots, Y_n} \psi(Y_1, \ldots, Y_n) \, A(Y_1) \ldots A(Y_n)$$

$\boxed{\psi(Y_1, \ldots, Y_n)}$: Coefficient de Mayer $(\in \mathbb{Z})$

. Graphe d'intersection : sur $\{1, \ldots, n\}$ = ensemble des noms

$$G = \{ \text{paires } \{i,j\} \text{ tq } Y_i \cap Y_j \neq \emptyset \}$$

$$\rightarrow \quad \psi(Y_1, \ldots, Y_n) = \sum_{\substack{H \subset G \\ H \text{ connecte } \{1, \ldots, n\}}} (-1)^{|H|}$$

- $\Psi(Y_1,\dots,Y_n)$ nul si G ne connecte pas $\{1,\dots,n\}$.
- Π_G ens. des partitions π de $\{1,\dots,n\}$ tq

$\forall B \in \pi, \quad G|_B$ connecte B.

$\pi_1 \leq \pi_2 \iff \pi_1$ plus fine que π_2

0 partition en singletons, 1 partition à un bloc,

$\to$ $\underline{\Pi_G}$ <u>treillis de partitions</u>.

$$\underline{\Psi(Y_1,\dots,Y_n) = \mu_{\Pi_G}(0,1)} \quad \text{Fonction de Moebius}$$

- $G \sim$ sous-arrangement de l'arrangement d'hyperplans $\mathcal{A}_{n-1}$

$$\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_i = x_j\}$$

- <u>Calcul de $\Psi(Y_1,\dots,Y_n)$ par renormalisation (A.A. 1997):</u>

$\mathcal{M} = (Y_1,\dots,Y_n)$ configuration de Mayer = suite qcq de polymères

on resoud $\quad 1 = e^{-\sum_{\mathcal{M}} \mathcal{C}(\mathcal{M})} Z \quad$ (condition de renormalisation du vide).

$\mathcal{C}(\mathcal{M})$ = inconnue = contre-terme du vide

- Ansatz $$\mathcal{C}(\mathcal{M}) = \frac{\Psi(\mathcal{M})\, \mathcal{A}(\mathcal{M})}{\sigma(\mathcal{M})}$$

$\sigma(\mathcal{M}) = n!$ facteur de symetrie

$\mathcal{A}(\mathcal{M}) = A(Y_1) \dots A(Y_n)$ amplitude

- On développe

$$1 = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!} \sum_{\substack{Y_1, \dots, Y_n \\ \text{disjoints}}} \sum_{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_r} A(Y_1) \dots A(Y_n)$$

$$\times \ (-\mathcal{C}(\mathcal{M}_1)) \dots (-\mathcal{C}(\mathcal{M}_r))$$

- CONCATENATION: ($\sim$ Coproduit ds Alg. de Hopf
Alg. d'incidence)

$$\mathcal{M}_{big} = (Y_1, \dots, Y_n, \underbrace{Y'_1, \dots, Y'_{m_1}}_{\mathcal{M}_1}, \dots, \underbrace{Y^r_1, \dots, Y^r_{m_r}}_{\mathcal{M}_r})$$

- On regroupe par valeurs de $\mathcal{M}_{big}$
- On symetrise sur l'ordre des éléments de $\mathcal{M}_{big}$
- Identification des coéfficients pour chaque monôme dans les variables $A(Y)$.

$$\rightarrow \quad \Psi(\mathcal{M}) = \sum_{W} \prod_{V \in W} \left(-\Psi(\mathcal{M}_V)\right)$$

($\approx$ Induction de Bogoliubov)

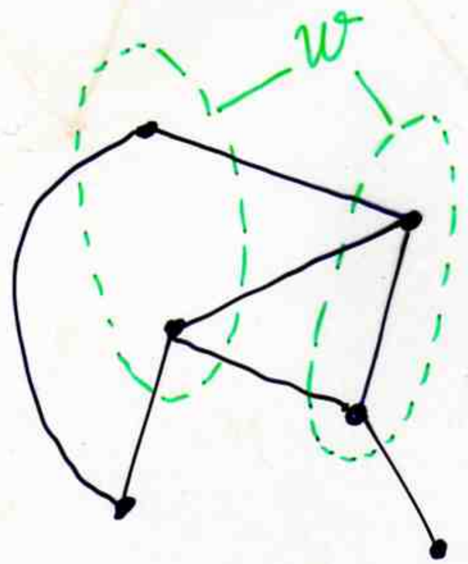
. W ensemble de parties propres disjoints de $\{1, \dots, n\}$

tq $i \neq j$ dans $\left(\bigcup_{V \in W} V\right)^c \Rightarrow Y_i \cap Y_j = \emptyset$

. si $V = \{i_1, \dots, i_k\}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$

$$\mathcal{M}_V = (Y_{i_1}, \dots, Y_{i_k}).$$

exemple :



$n = 6$

$\mathcal{M} = (Y_1, \dots, Y_6)$

point $\in \{1, 2, \dots, 6\}$

i —— j $\in$ graphe G

$\Leftrightarrow Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$

Solution de l'Induction :

$$\Psi(\mathcal{M}) = \sum_{\mathcal{F}} (-1)^{|\mathcal{F}|}$$

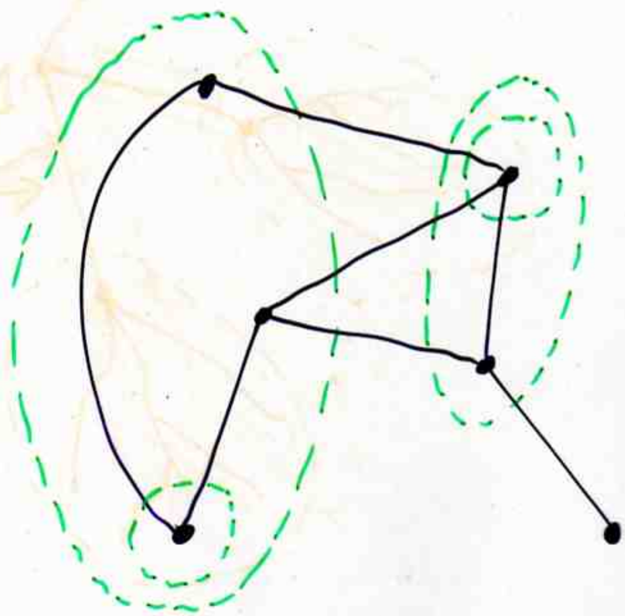
($\approx$ Formule de Forêt de Zimmermann)

$\mathcal{F}$ forêt admissible

• $\mathcal{F}$ ensemble de parties propres, disjointes ou emboîtées de $\{1,\dots,n\}$, (Forêt)

tq tous les liens de G coupés par $\mathcal{F}$ (admissible)

• exemple :



$n=6$

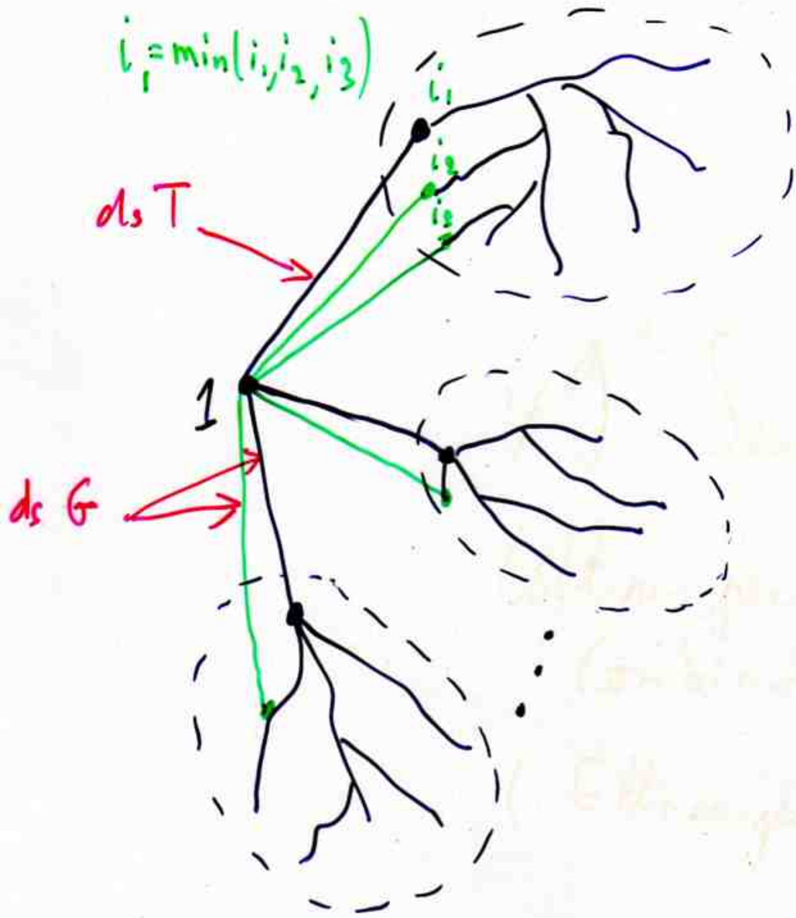
$|\mathcal{F}|=4$

• On peut réduire ($1+(-1)=0$) la somme sur les forêts à une somme sur des arbres (~ Théorème des circuits rompus de Rota).

$$\Psi(\mathcal{M}) = \sum_{T \text{ admissible}} (-1)^{\overset{=n-1}{|T|}}$$

T arbre de Cayley connectant $\{1,\dots,n\}$,

contenu dans G + autres conditions



Remarque si G graphe complet sur $\{1,\dots,n\}$

$$\Psi(y_1,\dots,y_n) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

en effet

$$\log(1+x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\boxed{(-1)^{n-1}(n-1)!}}{n!}\, x^n$$

Fin