Salut Malek

J'ai regardé tes égalités qui sont très intéressantes et m'ont paru justes (~~sauf Malek 2, que je ne comprends vraiment pas, car elle n'est pas homogène~~) et j'ai cherché une démonstration qui explique l'apparition de $s(n,k)$ dans Malek 5 ou encore de $(d_1-1)! \dots (d_k-1)!$ dans Malek 4

(ce nombre est le nombre de permutations de l'ensemble des parties de $\mathcal{D}$ dont les orbites sont les parties de $\mathcal{E}$; en effet le nombre de permutations circulaires de $\{1 .. n\}$ est $(n-1)!$)

On va utiliser le résultat suivant sur les permutations : si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et τ_{ab} transposition $\sigma \circ \tau_{ab}$ a un cycle de plus si a et b appartiennent au même cycle de σ et un cycle de moins dans le cas contraire.

Si $\tau_1 \dots \tau_r$ sont des transpositions, la décomposition $\sigma = \tau_1 \dots \tau_r$ sera de longueur minimale parmi les décompositions en produit de transpositions si et seulement les paires associées aux τ_i forment une forêt

Démontrons par exemple Malek 5

à $F = (\ell_1, \dots \ell_j)$ forêt $(j = n-k)$ associons la permutation $\sigma = \tau_{\ell_1} \dots \tau_{\ell_j}$

(τ_{ℓ_i} est la transposition associée à la paire ℓ_i)

On a alors le résultat plus précis suivant :

$$\sum_{\substack{F=(\ell_1 \dots \ell_j) \\ \sigma = \tau_{\ell_1} \dots \tau_{\ell_j}}} \frac{\mu_{\ell_1} \cdots \mu_{\ell_j}}{a_1 \cdots a_j} = 1$$

si σ est une permutation dont une décomposition minimale en transpositions fait intervenir j. i.e : σ a $(n-j)$ cycles.
Le résultat se démontre par récurrence croissante sur j
$\mu_{\ell_j} \in a_j \iff \sigma \tau_{\ell_j}$ a $(n-j+1)$ cycles
la somme associée à $\sigma \tau_{\ell_j}$ fait 1, et on somme alors sur les μ_{ℓ_j} dans a_j.

Relation 4 se démontre par le même genre d'argument
la décomposition en éléments simples a lieu dans le corps $\mathbb{R}(u_{ij})$ donc les pôles sont simples.
le coefficient de $(X+a_D)^{-1}$ est donc, si D subordonnée à $\mathcal{E}$

$$\sum_{\substack{F=(\ell_1 \dots \ell_\tau) \\ F_j \to D \\ F_\tau \to \mathcal{E}}} \frac{u_{\ell_1} \cdots u_{\ell_\tau}}{(-a_D+a_1) \cdots (-a_D+a_\tau)}$$

où $F_j \to D$ signifie que D est la partition associée à la forêt F_j
(l'entier $j \in \{1..\tau\}$ est déterminé par D : c'est $n-|D|$)

ceci vaut $(-1)^{n-1-|D|} \left(\sum_{\substack{F=(\ell_1 \dots \ell_j) \\ F_j \to D}} \frac{u_{\ell_1} \cdots u_{\ell_j}}{(-a_D+a_1) \cdots (-a_D+a_{j-1})} \right)$

$$\times \left(\sum_{\substack{F=(\ell_{j+1} \dots \ell_\tau) \\ (D+F_\tau) \to \mathcal{E}}} \frac{u_{\ell_{j+1}} \cdots u_{\ell_\tau}}{(a_{j+1}-a_D) \cdots (a_\tau - a_D)} \right)$$

le premier facteur vaut $a_{\mathcal{D}}$.
En effet $\ell_1 \dots \ell_{j-1}$ étant fixés, pour que $F_j \to \mathcal{D}$ il faut que $u_{\ell_j} \in a_{\mathcal{D}} - a_{j-1}$ (cela signifie u_{ℓ_j} apparaît dans la somme $a_{\mathcal{D}} - a_{j-1}$ ~~où~~ $a_{\mathcal{D}} = a_j$ bien sûr), donc la somme fait 1
Ensuite il faut que $\ell_{j-2} \in a_{\mathcal{D}} - a_{j-2}$ et la somme fait encore 1 ....
enfin on somme sur $u_{\ell_1} \in a_{\mathcal{D}}$, donc la somme fait $a_{\mathcal{D}}$.

---

le second facteur est plus complexe.
$F = (\ell_{j+1} \dots \ell_{\tau})$ va servir à "rassouder" les morceaux de $\mathcal{D}$ pour en faire $\mathcal{C}$.
On va raisonner comme ~~pour~~ (Talk 5) mais en assimilant les morceaux de $\mathcal{D}$ à des points. soit E l'ensemble des morceaux de $\mathcal{D}$.
A ℓ_i dans F on associe la paire des 2 morceaux de $\mathcal{D}$ auxquels appartiennent les points de ℓ_i et la ~~permutation~~ transposition τ_{ℓ_i} de E associée,
A la forêt F on associe la permutation σ de E qui est produit de ces transpositions.
σ a exactement pour orbites les parties de $\mathcal{D}$ correspondant au même morceau de $\mathcal{C}$
On démontre la formule par récurrence sur la longueur de σ $(= |E| -$ nb de cycles de σ
$=$ nb minimal de transpositions pour écrire σ
$= \tau - j$ ici).

On raisonne en fait sur

la formule plus précise

$$\sum_{\substack{F=(\ell_{j+1}\cdots\ell_\tau)\\ D+F\to\mathcal{C}\\ \tau_{\ell_{j+1}}\cdots\tau_{\ell_\tau}=\sigma}} \frac{u_{\ell_{j+1}}\cdots u_{\ell_\tau}}{(a_{j+1}-a_0)\cdots(a_\tau-a_0)} = 1$$

En effet, pour ℓ_τ fixé, il s'agit de décomposer $\sigma\circ\tau_{\ell_\tau}$, donc $a_{\tau-1}$ est connu et la somme vaut, par hypothèse de récurrence $\frac{u_{\ell_\tau}}{(a_\tau-a_0)}$.

Comme u_{ℓ_τ} peut être quelconque dans $a_\tau - a_0$, la somme finale vaut 1.

Nalek 1 résulte de Nalek 3 et du fait qu'il y a autant de permutations de longueur paire (signature 1) que de ———— impaire (———— -1)

Nalek 1,3 s'écrit plutôt

$$\prod v_{ij} = \left[\sum_F \sum_{\nu=0}^{\tau} \frac{b_\sigma (-1)^\tau u_{\ell_1}\cdots u_{\ell_\tau}}{\prod\limits_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{\tau}(a_\nu - a_\mu)}\right]$$

le sort de $\left(\frac{u_{\ell_1}\cdots\cdots u_{\ell_{\nu-1}}}{\prod\limits_{\mu=0}^{\nu-1}(a_\nu-a_\mu)}\right)$ est réglé comme pour Nalek 4 par récurrence sur ν et ceci vaut 1

(car on commence à $\mu=0$)

[Je précise qu'on fixe $\mathcal{D}$ partition de $\{1 \dots n\}$
et qu'on cherche le coefficient de $b_{\mathcal{D}}$.
ν est alors déterminé $\nu = n - |\mathcal{D}|$]

Le sort de $\left(\sum \dfrac{u_{e_\nu} \dots u_{e_\tau}}{\prod_{\mu=\nu+1}^{n} (a_\nu - a_\mu)} \right)$ est réglé

par le même raisonnement que pour la 2^e^ partie de Malek 2 (c'est à dire regarder les orbites de $\mathcal{D}$ comme des points) qui permet de se ramener à l'identité Malek 1

En fait Malek 2, 3 résulte de Malek 4 de la même façon que Malek 1 résulte de Malek 5 (au lieu de considérer les permutations de $\{1 \dots n\}$ on regarde celles de $E = \{$ morceaux de $\mathcal{D}\}$)

En conclusion Malek est la plus intéressante, les autres s'en déduisent ou en sont des cas particuliers.

Les intermédiaires dans la démonstration de Malek 4 se généralisent en les 2 formules suivantes:

si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$: $\mathcal{D}_1$ sub à $\mathcal{D}_2$
et F faisant le lien entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ c'est à dire

$F = (\ell_1 \dots \ell_\delta)$ ressoudant les morceaux de $\mathcal{D}_1$ en ceux de $\mathcal{D}_2$

si on note $a_k = \sum u_{ij}$, i et j connectés par D_1 et $l_1 \dots l_k$ alors on a

$$\sum_{\substack{F \text{ forêt} \\ \text{« de } D_1 \text{ à } D_2 \text{ »} \\ \tau_{l_1} \dots \tau_{l_{j-1}} = \sigma \text{ fixé}}} \frac{u_{l_1} \dots u_{l_j}}{(a_1 - a_{D_1})(a_2 - a_{D_1}) \dots (a_{D_2} - a_{D_1})} = 1$$

σ permutation de $E_1 = \{$morceaux de $D_1\}$

et

$$\sum_{\substack{F \text{ forêt} \\ \text{« de } D_1 \text{ à } D_2 \text{ »} \\ \text{(sans autre condition)}}} \frac{u_{l_1} \dots u_{l_j}}{(a_{D_2} - a_{D_1}) \dots (a_{D_2} - a_{j-1})} = 1$$

Je ne sais pas si on peut généralise Malek 4 grâce à cela, avec plus de 2 morceaux. En tous cas, Malek 4 se généralise :

$$\sum_{\substack{F = (l_1 \dots l_r) \text{ faisant le} \\ \text{lien entre } \ell_1 \text{ et } \ell_2 \\ (\ell_1 \text{ subord. à } \ell_2)}} \dots = \sum_{\substack{D \text{ sub à } \ell_2 \\ \ell_1 \text{ sub à } D}} \left(\frac{a_D - a_{(\ell_1)}}{x + a_D} \dots \right)$$

(mon cas est le cas $\mathcal{E}_1$ = trivial)

Amicalement Vincent