la ~~famille~~ forêt $(\ell_2, \dots, \ell_n)$ sur I_{n+1} induisant de même une forêt $\overline{F}$ sur J_n & $\left[\begin{array}{l} a^{\overline{F}}_p = a^F_{p+1} - a^F_1 \quad (0 \leq p \leq n-2), \quad \bar{a}_{total} = a_{total} - a^F_1 \\ a^F_1 = u_{\ell_1} \end{array}\right.$

$0 \leq p \leq n-2$ donc $\bar{a}_{total} - a^{\overline{F}}_p = (a_{total} - a^F_1) - (a^F_{p+1} - a^F_1) = a_{total} - a^F_{p+1}$

d'où par l'hypothèse de récurrence :

la somme pour $n+1$ devient $\displaystyle\sum_{\ell_1} \frac{u_{\ell_1}}{a_{total}} \times 1 = 1$

car $\displaystyle\sum_{\ell_1} u_{\ell_1} = a_{total}$ évidemment.

ceci achève de démontrer (3).

Citons que l'on peut approfondir la compréhension de la combinatoire contenue dans ces formules

(4) s'écrit : $\displaystyle 0 = \sum_{\tau=0}^{n-1} (-1)^\tau C^n_\tau$

$0 \leq \tau \leq n-1$, $\displaystyle C^n_\tau = \sum_{\substack{F=(\ell_1, \dots, \ell_\tau) \\ \text{forêt sur } I_n}} \frac{u_{\ell_1} \cdots u_{\ell_\tau}}{a^F_1 \cdots a^F_\tau}$, les C^n_τ sont des nombres

entiers : $C^n_\tau = (-1)^\tau s(n, n-\tau)$

où $s(n,k)$ désignent les nombres de Stirling de 1re espèce, $|s(n,k)|$ = nb. de permutations de n éléments ayant k cycles disjoints.

Ceci découle d'une identité remarquable

on suppose $n \geq 1$, $\mathcal{C}$ une partition de I_n, si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux partitions de I_n on dit que $\mathcal{D}_1$ est subordonnée à $\mathcal{D}_2$ on note $\mathcal{D}_1 \prec \mathcal{D}_2$ si les éléments de $\mathcal{D}_2$ sont réunion ~~des~~ d'éléments de $\mathcal{D}_1$ (ou ce qui revient au même $\mathcal{D}_1$ s'obtient en cassant les morceaux de $\mathcal{D}_2$)

$\tau = n-|\mathcal{C}|$, $|\mathcal{C}| = k$

(A3)

soit $R_{n,\mathcal{C},u}(X) = \sum_{\substack{F=(\ell_1,\dots,\ell_\tau)\\ \text{ccont } \mathcal{C}}} \dfrac{u_{\ell_1} - u_{\ell_\tau}}{(X+a_1^F)\dots(X+a_\tau^F)}$ ~~fraction rationnelle~~

si $\mathcal{C}$ est triviale (c.a.d. faite uniquement de singletons)
$R_{n,\mathcal{C},u}(X) = 1$.
sinon on a la décomposition en éléments simples en X :

$$R^*_{n,\mathcal{C},u}(X) = \sum_{\substack{\mathcal{D} \text{ non triviale}\\ \mathcal{D} \text{ sub } \mathcal{C}}} \frac{a_\mathcal{D}}{X+a_\mathcal{D}} (-1)^{n-1-|\mathcal{D}|} (d_1-1)!\dots(d_k-1)!$$

si $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_k\}$ $\mathcal{D}_i$ désigne la partition de $\mathcal{C}_i$ induite par $\mathcal{D}$
et $d_i = |\mathcal{D}_i|$.

<u>Dem</u>: conjecturons une expression $R_{n,\mathcal{C},u}(X) = \sum_{\substack{\mathcal{D} \text{ partition}\\ \text{sub } \preceq \mathcal{C}\\ \text{non triviale}}} \dfrac{a_\mathcal{D}}{X+a_\mathcal{D}} \cdot \omega_\mathcal{C}^\mathcal{D}$ (**)
(si $\mathcal{C}$ pas triviale)
 Où $\omega_\mathcal{C}^\mathcal{D}$ dépend uniquement des multi-indices
$d = (d_1,\dots,d_k)$ et $c = (c_1,\dots,c_k)$, où $c_i = |\mathcal{C}_i|$.
on note $\omega_\mathcal{C}^\mathcal{D} = \binom{d}{c}$
$\mathcal{C}$ non triviale $\Rightarrow$ $n \geq 2$, $\tau \geq 1$
on montre que cette conjecture est valide et on caractérise
les $\binom{1}{c}$ par récurrence sur n grâce au principe inductif:

$$R^*_{n,\mathcal{C},u}(X) = \sum_{\ell_1/\mathcal{C}} \frac{u_{\ell_1}}{X+u_{\ell_1}} \sum_{\substack{(\ell_2,\dots,\ell_\tau)\\ F=(\ell_1,\dots,\ell_\tau)\\ \text{sub une } \dots\text{-forêt}}} \frac{u_{\ell_2}\cdots u_{\ell_\tau}}{(X+a_2^F)\cdots(X+a_\tau^F)}$$

$$= \sum_{\ell_1/\mathcal{C}} \frac{u_{\ell_1}}{X+u_{\ell_1}} R^*_{n-1,\bar{\mathcal{C}},v}(X+u_{\ell_1})$$

$R_{n-1,\bar{\mathcal{C}},v}(\cdot)$ est la fraction rationnelle analogue définie
si $\ell_1 = \{\alpha\,\beta\}$, où I_{n-1} construit comme précédemment
ainsi que les variables $v_{\{a,b\}}$, $\{a,b\}$ paire dans I_{n-1}.

(15)

$\overline{\mathcal{E}}$ étant la partition induite par $\mathcal{E}$ sur $\mathfrak{I}_{n-1}$ en confondant les pts α et β en un seul c'est à dire si $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_e\}$ et $\{\alpha, \beta\} \subset \mathcal{E}_i$ alors

$$\overline{\mathcal{E}} = \{\overline{\mathcal{E}}_1, \dots, \overline{\mathcal{E}}_e\}$$

$$\overline{\mathcal{E}}_j = \mathcal{E}_j \text{ si } j \neq i, \qquad \overline{\mathcal{E}}_i = \{\{\alpha,\beta\}\} \cup (\mathcal{E}_i \setminus \{\alpha,\beta\})$$

soit $\tau = 1 \Rightarrow \displaystyle R^n_{\mathcal{E},U}(X) = \sum_{e_1 \text{ ds } \mathcal{E}} \frac{u_{e_1}}{X + u_{e_1}} = \frac{a_{\mathcal{E}}}{X + a_{\mathcal{E}}}$

~~la seule~~ $|\mathcal{E}| = n-1$, $\mathcal{E}$ formée d'une paire $\{e_1\}$ et puis de singletons. ($\mathcal{D}$ sup $\mathcal{E}$ car $\mathcal{D} = \mathcal{E}$ ou $\mathcal{D}$ triviale)

d'où l'existence de la decomposition dans ce cas

(***) $\left[\begin{array}{l} \omega^{\mathcal{D}}_{\mathcal{E}} = 1 \text{ si } \mathcal{D} = \mathcal{E}, \quad \omega^{\mathcal{D}}_{\mathcal{E}} = 0 \text{ si } \mathcal{D} \text{ triviale.} \\ \text{si } \mathcal{E} \text{ triv}, \ \mathcal{D} \text{ sub } \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{E} \text{ et } \omega^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = 1 \text{ par }\text{déf}^{\text{t}}. \end{array}\right.$

soit $\tau \geq 2 \Rightarrow$ $\overline{\mathcal{E}}$ n'est pas triviale.

recurrence $\Rightarrow$ $\displaystyle R^n_{\mathcal{E},U}(X) = \sum_{e_1/\mathcal{E}} \frac{u_{e_1}}{X + u_{e_1}} \sum_{\overline{\mathcal{D}} \text{ sub } \overline{\mathcal{E}}} \frac{\overline{a}_{\overline{\mathcal{D}}}}{X + u_{e_1} + \overline{a}_{\overline{\mathcal{D}}}} \, \omega^{\overline{\mathcal{D}}}_{\overline{\mathcal{E}}}$

($\overline{a}_{\overline{\mathcal{D}}}$ étant definie avec les variables $\overline{U}_{\{a\}}$)

$$R^n_{\mathcal{E},U}(X) = \sum_{e_1/\mathcal{E}} \sum_{\overline{\mathcal{D}} \text{ sur } \overline{\mathcal{E}}} \left[\frac{u_{e_1}}{X + u_{e_1}} - \frac{u_{e_1}}{X + u_{e_1} + \overline{a}_{\overline{\mathcal{D}}}}\right] \omega^{\overline{\mathcal{D}}}_{\overline{\mathcal{E}}}$$

(***) $\left[\begin{array}{l} \text{posons aussi } \omega^{\mathcal{D}}_{\mathcal{E}} = 0 \text{ si } \mathcal{D} \text{ trivial et pas } \mathcal{E}\text{, ça ne change pas } (\ast\ast) \\ \text{car } a_{\mathcal{D}} = 0 \text{ dans ce cas} \end{array}\right.$

donc

$$R^n_{\mathcal{E},U}(X) = \sum_{\substack{e_1/\mathcal{E} \\ \overline{\mathcal{D}} \text{ non triv} \\ \text{sub } \overline{\mathcal{E}}}} \left[\frac{u_{e_1}}{X + u_{e_1}} - \frac{u_{e_1}}{X + u_{e_1} + \overline{a}_{\overline{\mathcal{D}}}}\right] \omega^{\overline{\mathcal{D}}}_{\overline{\mathcal{E}}}$$

$\overline{\mathcal{D}}$ non triv $\Rightarrow$ $\overline{a}_{\overline{\mathcal{D}}}$ contient des $u_{\{i,j\}}$ pour des paires autres que u_{e_1} donc les fraction de droite fourniront de

pôles différents de la fraction de gauche.
sous l'hypothèse (H) que les $\omega^{\mathcal D}_{\mathcal C}$ ne dépendent que des multiindices
de b c, ~~on a si $T \geq 2$~~ : ~~on~~ définissant le nombre
de liens de $\mathcal D$ comme $n - |\mathcal D|$, on a :

$$\boxed{T \geq 2} \Rightarrow \begin{cases} \omega^{\mathcal D}_{\mathcal C} = \displaystyle\sum_{\substack{\bar{\mathcal D} \text{ non triv} \\ \text{sub à } \bar{\mathcal C}}} \omega^{\bar{\mathcal D}}_{\bar{\mathcal C}} = \sum_{\substack{\bar{\mathcal D} \text{ sub à } \bar{\mathcal C} \\ \text{même triv}}} \omega^{\bar{\mathcal D}}_{\bar{\mathcal C}} & \text{si } \mathcal D \text{ a un lien} \\ \omega^{\mathcal D}_{\mathcal C} = -\,\omega^{\bar{\mathcal D}}_{\bar{\mathcal C}} & \text{si } \mathcal D \text{ a plus d'un lien} \end{cases}$$

$\bar{\mathcal C}$ obtenu en contractant le lien ℓ f_ℓ ~~correspondante~~ unique

$\bar{\mathcal C}$ obtenu avec contractant d'un porté par lien $\ell / \mathcal D$ ($\Rightarrow \ell / \mathcal C$) de même que $\bar{\mathcal D}$ avec $\mathcal D$ pour le même choix de lien ℓ.

ces formules se généralisent à $T = 1$ avec les conventions (***)
d'où le système que doivent vérifier les $\omega^{\mathcal D}_{\mathcal C}$.

$$(S_1) \begin{cases} \omega^{\text{triv}}_{\text{triv}} = 1 \\ \text{si } \mathcal C \text{ non triv :} & \text{(i) } \mathcal D \text{ a plus d'un lien} \quad \omega^{\mathcal D}_{\mathcal C} = -\,\omega^{\bar{\mathcal D}}_{\bar{\mathcal C}} \\ & \text{(ii) } \mathcal D \text{ n'a qu'un lien} \quad \omega^{\mathcal D}_{\mathcal C} = \displaystyle\sum_{\bar{\mathcal D} \text{ sub } \bar{\mathcal C}} \omega^{\bar{\mathcal D}}_{\bar{\mathcal C}} \\ & \text{(iii) } \mathcal D \text{ triv} \quad \omega^{\mathcal D}_{\mathcal C} = 0 \end{cases}$$

pour justifier l'hypothèse H il faut trouver des solutions de la forme

$$\omega^{\mathcal D}_{\mathcal C} = \binom{d}{c}$$

eg: $\mathcal{C}$ triviale $\Leftrightarrow$ $k=n$, $c_1 = \dots = c_k = 1$

$\Leftrightarrow$ $c = \mathbb{1}$ $\equiv$ (multi indice $(1,\dots,1)$)

si $\mathcal{D}$ sub $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ triviale $\Leftrightarrow$ $d = c$.

notons: $d \preceq c$ si $\forall i$, $d_i \leq c_i$

$d \prec c$ si $d \preceq c$ et $\mathbb{1} \neq c$

$|d| = d_1 + \dots + d_k$.

$\Rightarrow$ $n = |c|$,

nb liens de $\mathcal{D}$, $n - |d| = |c| - |d| = \ell(\mathcal{D})$

si $\ell(\mathcal{D}) \geq 2$ on peut appliquer (i) $\ell(\mathcal{D}) - 1$ fois jusqu'à arriver à $\bar{\bar{\mathcal{D}}}$, $\bar{\bar{\mathcal{C}}}$ avec $\bar{\bar{\mathcal{D}}}$ formée d'un lien

~~......~~ $\Rightarrow$ $\omega_c^{\mathcal{D}} = (-1)^{\ell(\mathcal{D})-1} \omega_{\bar{\bar{\mathcal{C}}}}^{\bar{\bar{\mathcal{D}}}}$

puis on applique (i) $\rightarrow$ $\bar{\bar{\bar{\mathcal{C}}}}$ de multiindice $\underline{\underline{\bar{\bar{\bar{c}}} = d}}$

donc

$$\binom{d}{c} = (-1)^{|c|-|d|-1} \sum_{\bar{\bar{\bar{\mathcal{D}}}} \text{ sub } \bar{\bar{\bar{\mathcal{C}}}}} \omega_{\bar{\bar{\bar{\mathcal{C}}}}}^{\bar{\bar{\bar{\mathcal{D}}}}}$$

car lorsque l'on contracte un lien dans une composante (à condition que $d_i > c_i$) de $\mathcal{D}_i$ de $\mathcal{C}_i$, $\bar{d}_i = |\bar{\mathcal{D}}_i|$ reste égal à $d_i = |\mathcal{D}_i|$ mais le nb d'éléments de $\mathcal{C}_i$ a baissé d'une unité

$\bar{c}_i = |\bar{\mathcal{C}}_i| = c_i - 1$,

la somme sur les partitions $\bar{\bar{\bar{\mathcal{D}}}}$ subordonnées à $\bar{\bar{\bar{\mathcal{C}}}}$ fait intervenir ~~des~~ la sommation sur toutes les partitions $\bar{\bar{\bar{\mathcal{D}}}}_i$ pareilles de $\bar{\bar{\bar{\mathcal{C}}}}_i$ qui sont en nombre $S(|\bar{\bar{\bar{\mathcal{C}}}}_i|, |\bar{\bar{\bar{\mathcal{D}}}}_i|)$ lorsqu'on fixe $e_i = |\bar{\bar{\bar{\mathcal{D}}}}_i|$

($S(n,k)$ désignant les nombres de Stirling de deuxième espèce, qui comptent les partitions de n éléments en k sous ensembles)

d'où

$$\binom{d}{c} = (-1)^{|c|-|d|-1} \sum_{e \preceq d} S(d_1, e_1) \dots S(d_k, e_k) \binom{e}{d}$$

on cherche donc des ensembles $\binom{d}{c}$, $d \lesssim c$ satisfaisant à

(S_2)

$$\boxed{\begin{cases} \binom{d}{c} = (-1)^{|d|+|k|+1} \sum\limits_{\mathbb{1} \lesssim e \lesssim d} S(d_1,c_1)\cdots S(d_k,c_k)\binom{e}{d} \\ \text{si } c > \mathbb{1} \text{ et } c > d \\ \binom{d}{c} = 0 \text{ si } c > \mathbb{1}, \text{ et } d = c \\ \binom{d}{c} = 1 \text{ si } c = d = \mathbb{1} \end{cases}}$$

notation : $B_{ab} = (-1)^{|b|}\binom{a}{b}$ si $a \lesssim b$, 0 sinon

$T_{ab} = - S(b_1,a_1)\cdots S(b_k,a_k)$ si $a \lesssim b$, 0 sinon

on doit avoir :

si $c > \mathbb{1}$, $\begin{cases} \mathbb{1} \lesssim d < c \Rightarrow B_{dc} = \sum\limits_{1 \lesssim e \lesssim d} T_{ed} B_{ed} \\ d = c \Rightarrow B_{dc} = 0 \end{cases}$

si $c = \mathbb{1}$ $\quad B_{dc} = B_{cc} = B_{\mathbb{1}\mathbb{1}} = (-1)^k$

si $d \gtrsim \mathbb{1}$, B_{dc} ne doit pas dépendre de $c > d$

appelons le U_d

$$U_d = \sum_{1 \lesssim e \lesssim d} T_{ed} B_{ed}$$ si $c < d$, $B_{ed} = U_e$

~~si $c \not< d$, B_{ed}~~

$$U_{\mathbb{1}} = \underbrace{T_{\mathbb{1}\mathbb{1}}}_{=-1} B_{\mathbb{1}\mathbb{1}}$$

(A6)

si $d > 1$, $\quad U_d = \sum_{1 \leq e < d} T_{ed} \, U_e$

l'itération de cette formule donne :

$$U_d = \left(\sum_{1 \leq e_m < \dots < e_1 < d} T_{1 e_m} T_{e_m e_{m-1}} \cdots T_{e_1 d} \right) U_1$$

soit $\quad U_d = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{e_1, \dots, e_m} (T - (-I))_{1 e_m} \cdots (T - (-I))_{e_1 d} \, U_1$

(à d fixé la somme est finie en m)

imposer $a \leq b$ pour calculer les produits de T_{ab} comme $T_{ab} \neq 0$ ~~[illegible]~~ déjà $a \leq b$, c'est retirer les termes diagonaux (-1) donc travailler avec $T - (-I)$

$$U_d = \sum_{m=0}^{+\infty} (I + T)^m_{1d} \; U_1$$

$$= \left(I - (I + T) \right)^{-1}_{1d} \; U_1$$

$$U_d = (-T)^{-1}_{1d} \, U_1 = (T^{-1})_{1d} \cdot (-1)^k$$

or $\quad T = {}^t(\underbrace{S \otimes \dots \otimes S}_{k \text{ fois}})$

donc $\quad T^{-1} = {}^t(S^{-1} \otimes \dots \otimes S^{-1})$

mais il est connu en analyse combinatoire que les matrices infinies s, S des nombres de Stirling de 1ère et de 2ème espèce respectivement, sont inverses l'une de l'autre donc :

$$(T^{-1})_{1d} = s(d_1, 1) \cdots s(d_k, 1)$$

or $\quad s(n, 1) = (-1)^{n-1} (n-1)!$ $\quad$ (il y a $(n-1)!$ permutations circulaires à n éléments) d'où $\binom{d}{d} = U_d = (-1)^{|d|+1} (d_1-1)!\dots(d_k-1)!$

si $c > d$, $B_{dc} = U_d$, $\binom{d}{c} = (-1)^{|c|} B_{dc}$

donc $\binom{d}{c} = (-1)^{|d|+|c|+1} (d_1-1)!\dots(d_k-1)!$

concluons les symboles satisfaisant à (S_2) sont

$$\begin{cases} \text{si } c > 1, & d < c \quad \binom{d}{c} = (-1)^{|d|+|c|+1}(d_1-1)!\dots(d_k-1)! \\ & d = c \Rightarrow \binom{d}{c} = 0 \\ \text{si } c = 1 & d = 1 \Rightarrow \binom{d}{c} = \binom{1}{1} = 1 \end{cases}$$

Le calcul de C^n_T peut se déduire de (A3) en prenant $X = 0$.

Le fait que des $s(n,k)$ apparaissent dans ces formules ainsi que des sommes sur les forêts peut en définitive s'expliquer par ~~deux~~ faits suivants : une permutation de n éléments s'écrit comme produit de cycles à supports disjoints mais aussi comme produit de transpositions. Soit σ une telle permutation et τ_{ab} une transposition. L'effet de composer σ par τ_{ab} sera de souder les cycles de σ si a et b sont dans des cycles différents, au contraire ce sera de casser en deux un cycle de σ si a et b sont dans ce dernier. Donc si $\sigma = \tau_{\ell_1} \cdots \tau_{\ell_k}$ est une décomposition de σ en un nombre minimal de transpositions $\{\ell_1, \dots, \ell_k\}$ forment une forêt dont les arbres composent les cycles disjoints de σ.